Exercice n° 1

a) $f(x)=x^2+1 \Rightarrow f'(x)=2x>0 \quad \forall x \in]0,+\infty[$

Donc f est continue et strictement croissante sur IR_+

Par la suite f admet une fonction réciproque f^{-1}

définie sur $f([0,+\infty[)=[f(0), \lim_{+\infty} f[=[1,+\infty[=J$

b) • $f(0)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=0$

• $f^{-1}(2)=x_0 \Leftrightarrow f(x_0)=2 \Leftrightarrow x_0^2+1=2 \Leftrightarrow x_0^2=1$
$\Leftrightarrow x_0=1$ ou $x_0=-1$ comme $x_0 \in [0,+\infty[$

On aura $\boxed{f^{-1}(2)=1}$

• $f^{-1}(3)=x_0 \Leftrightarrow f(x_0)=3 \Leftrightarrow x_0^2+1=3 \Leftrightarrow x_0^2=2$
$\Leftrightarrow x_0=\sqrt{2}$ ou $x_0=-\sqrt{2}$ comme $x_0 \in [0,+\infty[$

On aura $\boxed{f^{-1}(3)=\sqrt{2}}$

c) • f et f^{-1} ont même sens de variation donc f^{-1} est strictement croissante sur J

• f est dérivable sur $[0,+\infty[$

et $f'(x)=2x \neq 0 \ \forall \ x>0$

Donc f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$

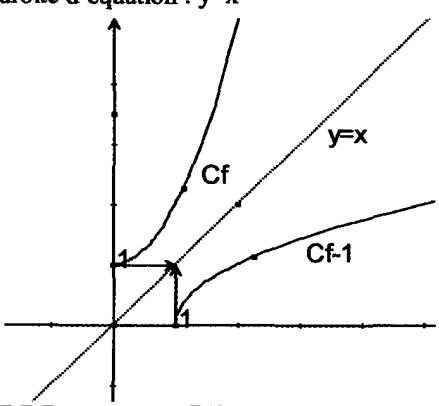
d) $x \in J, y \in [0,+\infty[$:

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$, cherchons donc y :

$y^2+1=x \Leftrightarrow y^2=x-1 \Leftrightarrow y=\sqrt{x-1}$ ou bien

$y=-\sqrt{x-1}$, or $y \geq 0$ d'où $\boxed{f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}}$

e) Cf La courbe de f est une demi-parabole admettant une demi tgte horizontale à droite au sommet S(0,1).
La courbe de f^{-1} est le symétrique de Cf par rapport à la droite d'équation : y=x



Exercice n° 2

$x \in [0,+\infty[$; $g(x)=-1+\sqrt{x}$

a) pour $x>0$, $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$

g est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1}

b) $g([0,+\infty[)=[g(0), \lim_{+\infty} g[=[-1,+\infty[$

Donc g^{-1} est définie sur $J=[-1,+\infty[$

c) $x \in [-1,+\infty[$, $y \in [0,+\infty[$:

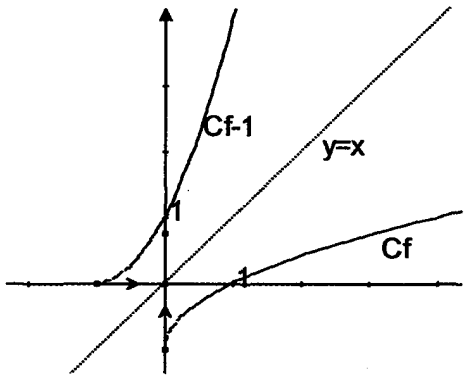
$g^{-1}(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x$, cherchons donc y :

$-1+\sqrt{y}=x \Leftrightarrow \sqrt{y}=x+1$

$\Leftrightarrow y=(1+x)^2$

alors $\boxed{g^{-1}(x)=(1+x)^2}$

d) Cg La courbe de g est une demi-parabole admettant une demi tgte verticale au point S(0,-1).
La courbe de f^{-1} est le symétrique de Cg par rapport à la droite d'équation : y=x (Cf^{-1} admet une demi- tg horizontale à droite au point S'(-1 ;0))



Remarque : g dérivable sur $]0,+\infty[$
g^{-1} dérivable sur $[-1,+\infty[$ et $(g_d^{-1})'(-1)=0$

Exercice n° 3

● $h(x)=x-\dfrac{1}{x}$, $x>0$

h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $h'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}>0$

Donc h est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$
Par la suite h admet une fonction réciproque h^{-1}

définie sur $J=h(]0,+\infty[)$
$=\left]\lim_{0^+} h, \lim_{+\infty} h\right[= IR$

● $x \in IR$, $y \in]0,+\infty[$:

$h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow h(y) = x$, cherchons y :

$$y - \frac{1}{y} = x \Leftrightarrow y^2 - y.x - 1 = 0$$

Résolution de l'équation : $y^2 - y.x - 1 = 0$

On a : $\Delta = x^2 + 4 > 0$

D'où

$$\Leftrightarrow y = y_1 = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2} \text{ ou bien } y = y_2 = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$$

Comme $h(1) = 0$ on aura $h^{-1}(0) = 1$,

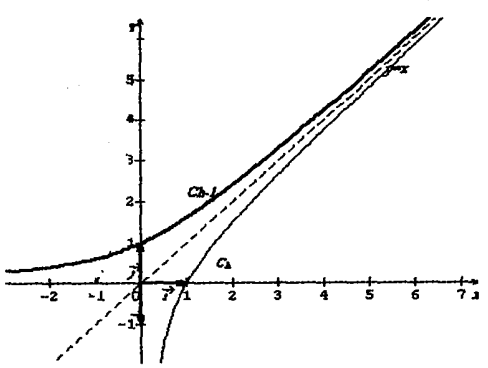
En remplacent x par 0 dans les expressions de y_1 et y_2 on trouve $y_1 = 1$

Ce qui prouve que : $\boxed{h^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}}$

● $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \overbrace{1 - \frac{1}{x^2}}^{0} = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) - x = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

Il résulte que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote oblique à C_h



Exercice n° 4

$f(x) = tg(x)$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

● f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$f'(x) = 1 + tg^2 x > 0$

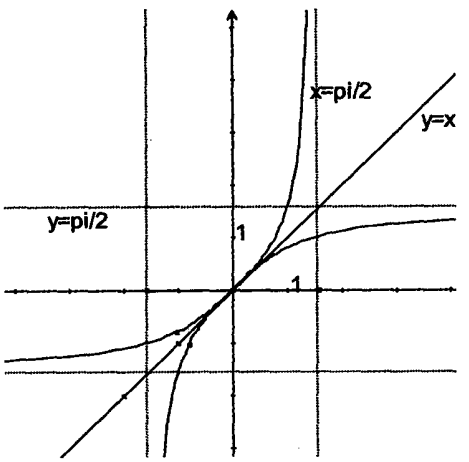
f continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

donc f est bijective

● $\lim\limits_{x \to (-\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to (-\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

Donc les droites : $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ sont deux asymptotes pour la courbe de f



Exercice n° 5

$$f(x) = \frac{-1+2x}{6+3x}$$

a) f est dérivable sur $]-2,+\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{15}{(6+3x)^2} > 0 \qquad \boxed{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}}$$

f est strictement croissante sur $]-2,+\infty[$

b) f est continue et strictement croissante sur $]-2,+\infty[$ d'où f réalise une bijection de $]-2,+\infty[$ sur l'intervalle

$$I = f(]-2,+\infty[) = \left]\lim_{x \to (-2)^+} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[= \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$$

c) $x \in \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$, $y \in]-2,+\infty[$

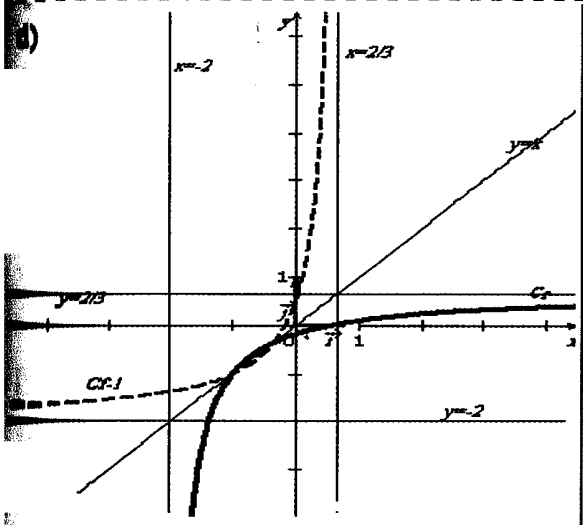
$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$, cherchons donc y :

$$\frac{-1+2y}{6+3y} = x \Leftrightarrow 2y - 3xy = 1 + 6x$$

$$\Leftrightarrow y(2-3x) = 1 + 6x \Leftrightarrow y = \frac{1+6x}{2-3x}$$

Donc $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1+6x}{2-3x}}$

d)



Exercice n° 6

$f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$

a) $x \to x^2$ est dérivable sur IR

$x \to 1+x^2$ est dérivable sur IR: et $1+x^2>0$

Donc f est dérivable sur IR et on a :

$$f'(x)=\frac{2x(1+x^2)-2x\,x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2x+2x^3-2x^3}{(1+x^2)^2}$$

Conclusion $f'(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $x \in$ IR

b) Tableau des variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

a) g est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ d'où g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $g(]0,+\infty[)=]0,1[=J$

b)) $x \in]0,1[$, $y \in]0,+\infty[$

$g^{-1}(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x$, cherchons donc y :

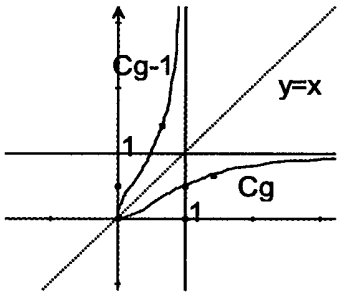
$$\frac{y^2}{1+y^2}=x \Leftrightarrow y^2=(1+y^2).x$$

$$\Leftrightarrow y^2=x+x.y^2.$$

$$\Leftrightarrow y^2(1-x)=x \Leftrightarrow y^2=\frac{x}{1-x} \text{ comme } y>0$$

Alors $\boxed{g^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}$

c) Courbe de g et sa réciproque



Exercice n° 7

$f(x)=\dfrac{2}{\sin x}$, $x \in]0,\pi[$

a) f est dérivable sur $]0,\pi[$ car sin(x) $\neq 0$ et on a

$f'(x)=-\dfrac{2\cos x}{(\sin x)^2}$, le signe de $f'(x)$ est le contraire de celui de cos(x)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\sin x}=\frac{2}{0^+}=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pi^-}\frac{2}{\sin x}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

g restriction de f à $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

a) g étant continue et strictement décroissante sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ d'où g réalise une bijection de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $g\left(\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=]2,+\infty[$ donc g admet une fonction réciproque définie sur $]2,+\infty[$

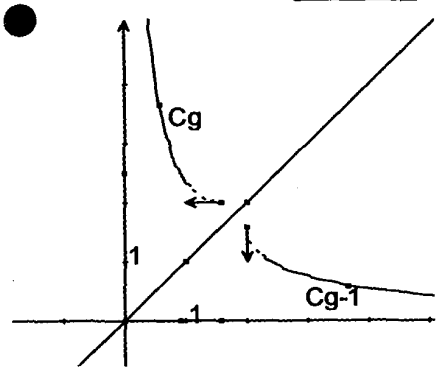
b) On a : * $g(0) = 2$ d'où $g^{-1}(2) = 0$

* posons $g^{-1}(4) = \alpha$ donc on aura $g(\alpha) = 4$

C'est-à-dire $\frac{2}{\sin\alpha} = 4$ ce qui donne

$\sin\alpha = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$

Donc $\alpha = \frac{\pi}{3}$ finalement $\boxed{g^{-1}(4) = \frac{\pi}{3}}$



Exercice n° 8

$f(x) = x^5$, $x \in [0, +\infty[$

a) $f'(x) = 5x^4 > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$

f est continue et strictement croissante sur IR_+

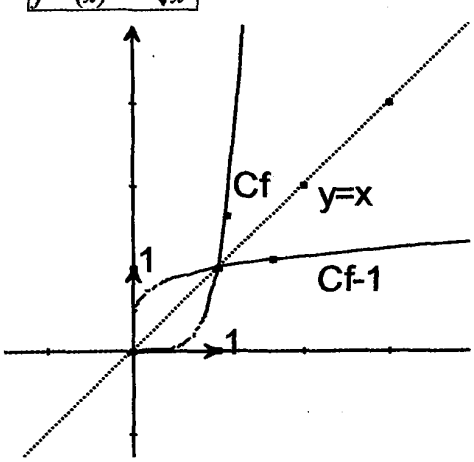
D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie

sur $f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{+\infty} f[= [0, +\infty[$

- Expression de $f^{-1}(x)$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow y^5 = x \Leftrightarrow y = \sqrt[5]{x}$

$\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}}$



Exercice n° 9

$g(x) = 2\sqrt[3]{x} + 1$

a) pour $x > 0$ on a $\sqrt[3]{x}$ est dérivable donc g est dérivable sur $]0, +\infty[$.

On sait que : $(\sqrt[n]{x})' = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$, $x > 0$

(Voir Activité 3 p 69)

Donc $\forall x > 0 : g'(x) = 2.\frac{\sqrt[3]{x}}{3x}$

b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-1}{x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt[3]{x}+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}}$

$= \lim_{x\to 0^+} 2.\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} 2.\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty$ $\boxed{\sqrt[n]{x^n} = x}$

D'ou $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = +\infty$, par la suite g est non dérivable à droite en 0 et la courbe de g admet au point d'abscisse 0 une demi- tangente verticale dirigée vers le haut

c)

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	|	+
$g(x)$	1	$+\infty$

d) g étant continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ il résulte que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$

e) $x \geq 1$ et $y \geq 0$:

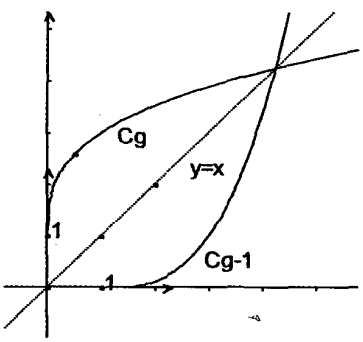
$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{y} + 1 = x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt[3]{y} = x - 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = \frac{x-1}{2}$

$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{y})^3 = (\frac{x-1}{2})^3 \Leftrightarrow y = (\frac{x-1}{2})^3$

D'où $\boxed{g^{-1}(x) = (\frac{x-1}{2})^3}$

f) courbe de g et g^{-1}



Exercice n° 10

● a) $x \to 1-\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$x \to 1+\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $1+\sqrt{x} \neq 0 \ \forall x \succ 0$: donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$f'(x)=\frac{(1-\sqrt{x})'.(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x}).(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}.(1+\sqrt{x})^2}$$

b)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	1 ↘	-1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)}{\sqrt{x}(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)}=-1$$

($\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$)

c) f est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ d'où elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J=]-1,1]$

d) $f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2-2\sqrt{x}=1+\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 1=3\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{3}$ donc $\boxed{x=\frac{1}{9}}$

e) • $f(4)=\frac{1-\sqrt{4}}{1+\sqrt{4}}=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$

• $(f^{-1})'(-\frac{1}{3})=\frac{1}{f'\left[(f^{-1})(-\frac{1}{3})\right]}=\frac{1}{f'(4)}=\frac{1}{-\frac{1}{18}}$

$=-18$

D'où $\boxed{(f^{-1})'(-\frac{1}{3})=-18.}$

● a) $g'(x)=f'(x)-1<0, \ \forall x \geq 0$

g étant continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ il résulte que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[)=\left]\lim_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right]$

Or : $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=-1-\infty=-\infty$

Et $g(0)=f(0)-0=1$

Donc $g([0,+\infty[)=]-\infty,1]$

Coclusion : g est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]-\infty,1]$

b) $f(x)=x \Leftrightarrow g(x)=0$ et on a $0 \in]-\infty,1]$ il résulte que 0 admet un unique antécédent α par g dans $[0,+\infty[$

c) $\begin{cases} g(0)=1 \\ g(1)=f(1)-1=-1 \end{cases} \Rightarrow g(0).g(1)<0$

Conclusion : $0<\alpha<1$

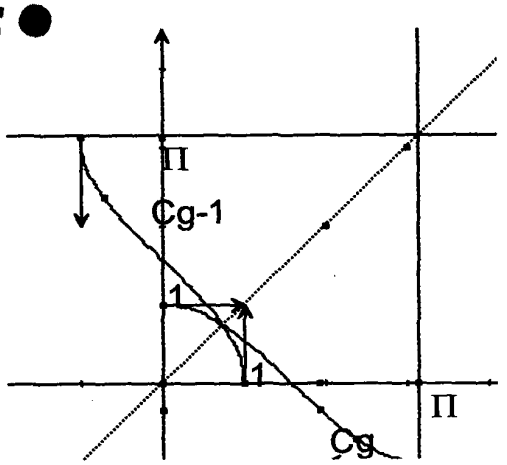
Exercice n° 11

● $g'(x)=-\sin(x)<0 \ \forall x \in]0,\pi[\Rightarrow$ g est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc g est une bijection de $[0,\pi]$ sur $g([0,\pi])=[-1,1]$.

●* $g^{-1}(0)=x_0 \Leftrightarrow g(x_0)=0 \Leftrightarrow \cos x_0=0 \Leftrightarrow x_0=\frac{\pi}{2}$

Donc $\boxed{g^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}}$

*De même on a : $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ d'où $\boxed{g^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{3}}$



● $x \in [-1, 1]$

a) $\cos[g^{-1}(x)] = g(g^{-1}(x)) = x$

$\sin[g^{-1}(x)] = \sqrt{1-\cos^2(g^{-1}(x))} = \sqrt{1-x^2}$

b) On sait que : $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ d'où

$$\cos(\pi - g^{-1}(x)) = -\cos(g^{-1}(x))$$

$$\cos(\pi - g^{-1}(x)) = -x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$g^{-1}[\cos(\pi - g^{-1}(x))] = g^{-1}(-x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underbrace{g^{-1}og}_{Id}(\pi - g^{-1}(x)) = g^{-1}(-x)$$

Finalement : $\boxed{\pi - g^{-1}(x) = g^{-1}(-x).}$

Exercice n° 12

$f(x) = 2x - \sin x$, $x \in$ IR

● f est dérivable sur IR et $f'(x) = 2 - \cos x > 0$ car $\cos x \leq 1$ donc f strictement croissante sur IR

* f est continue et strictement croissante sur IR donc f réalise une bijection de IR sur f(IR)

Or on sait que $\forall x \in IR : -1 \leq \sin x \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 + 2x \leq 2x - \sin x \leq 1 + 2x$

Utilisant le théorème de comparaison :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 = +\infty$ Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x + 1 = -\infty$ Alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

D'où $f(\text{IR}) = \left]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f\right[= \text{IR}$

● a) f est une bijection de IR sur IR, $4 \in$ IR donc l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution dans IR

b) $f(2,2) = 3,59 < 4$ et $f(2,4) = 4,12 > 4$

Donc $\boxed{2,2 \leq \alpha \leq 2,4.}$

● $g(x) = 2 + \frac{1}{2}\sin x$

a) $g(\alpha) = 2 + \frac{1}{2}\sin\alpha$ (*)

On sait que $f(\alpha) = 4$ donc $2\alpha - \sin\alpha = 4$ et par la suite

$\sin\alpha = 2\alpha - 4$

Remplacent cette expression de $\sin\alpha$ dans l'égalité (*)

On aura : $g(\alpha) = 2 + \frac{1}{2}(2\alpha - 4) = 2 + \alpha - 2 = \alpha$

D'où $\boxed{g(\alpha) = \alpha.}$

b) $g'(x) = \frac{1}{2}\cos x$

Or : $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\cos x \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}\cos x\right| \leq \frac{1}{2}$

Donc $\forall x \in IR$, $\boxed{|g'(x)| \leq \frac{1}{2}}$

c) g est dérivable sur IR , $x \in IR$, $\alpha \in IR$ et $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ donc d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis on a :

$|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

$\Leftrightarrow |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Exercice n° 13

● f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$f'(x) = (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})' = 0 + \frac{-(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}^2} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$f'(x) < 0$: f étant continue et strictement

décroissante sur $]1,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur l'intervalle $J=f(]1,+\infty[)=]1,2[$

● $x \in]1,2[$, $y \in]1,+\infty[$

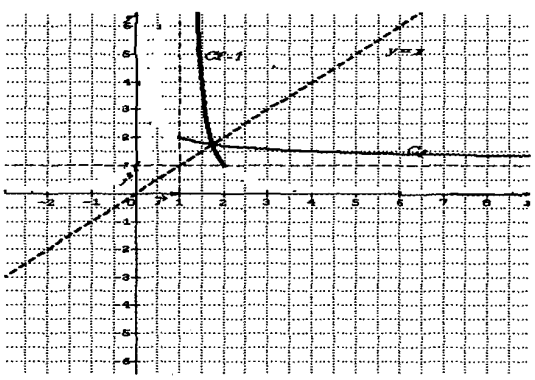
$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$, cherchons donc y

$$f(y)=1+\frac{1}{\sqrt{y}}=x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y}}=x-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}=\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow y=\left(\frac{1}{x-1}\right)^2$$

Conclusion : $\boxed{f^{-1}(x)=\frac{1}{(x-1)^2}}$; $x \in]1,2[$

●



● Posons $g(x)=f(x)-x$

$\forall x>1$: $g'(x)=f'(x)-1<0$ car $f'(x)<0$

Donc g est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ et $g(]1,+\infty[)=]-\infty,1[$

Comme $0 \in]-\infty,1[$ alors l'équation $g(x)=0$ (et par la suite l'équation $f(x)=x$) admet une unique solution α dans l'intervalle $]1,+\infty[$

● $\forall x \geq 1$ on a : $2x\sqrt{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$

D'où $f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}} \geq -\frac{1}{2}$

Ce qui donne : $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0 \leq \frac{1}{2}$

Finalement : $\forall x \geq 1$ on a $\boxed{|f'(x)| \leq \frac{1}{2}}$

● f est dérivable sur $]1,+\infty[$, $x \in]1,+\infty[$

$\alpha \in]1,+\infty[$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

Donc d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis on a : $|f(x)-f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

On a aussi : $f(\alpha)=\alpha$ d'où $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

Exercice n° 14

$x \in \left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$; $f(x)=2-\sqrt{-2x+1}$

● a) La fonction : $x \mapsto -2x+1$ est dérivable est strictement positive sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$

Donc f est dérivable sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ (Rque : f n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$)

$$f'(x)=0-\frac{(-2x+1)'}{2\sqrt{-2x+1}}=-\frac{-2}{2\sqrt{-2x+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-2x+1}}>0$$

Tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$
$f(x)$	$-\infty$	↗	2

b) f est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$ donc f réalise une bijection de $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$ sur $J=f\left(\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\right)=]-\infty,2]$

● $y \in \left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$, $x \in]-\infty,2]$

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$, cherchons donc y

$$f(y)=2-\sqrt{-2y+1}=x \Leftrightarrow \sqrt{-2y+1}=2-x$$

$$\Leftrightarrow -2y+1=(2-x)^2 \Leftrightarrow y=\frac{1-(2-x)^2}{2}$$

$$=\frac{1-(4-4x+x^2)}{2}$$

Conclusion : $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(-x^2+4x-3)$, $x \in]-\infty,2]$

● on a $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(-x^2+4x-3)$, $x \in]-\infty,2]$ donc f^{-1} est dérivable sur $]-\infty;2]$ (fonction polynôme)

Conclusion : f^{-1} est dérivable sur $]-\infty,2]$

● $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'[(f^{-1})(1)]}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{1}=1$

(Rque : On peut aussi calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)=-x+2$)

Exercice n° 15

● • a) h est définie si et seulement si

$|x| - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow |x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$ *ou* $x \neq -1$

Donc : $Dh = IR \setminus \{-1,1\}$

• pour tt $x \in Dh$, *on a* $-x \in Dh$ et :

$$h(-x) = \frac{-x}{|-x|-1} = -\frac{x}{|x|-1} = -h(x)$$

D'où h est une fonction impaire ce qui prouve que l'origine du repère est un centre de symétrie pour la courbe de la fonction h.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$ (Pour $x > 0$ on a $|x| = x$)

Donc la droite d'équation y = 1 est une asymptote horizontale pour la courbe de h au voisinage de $+\infty$

• $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x}{\underbrace{|x|}_{=x>0} - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Donc la droite d'équation x = 1 est une asymptote verticale pour la courbe de h

**Par raison de symétrie les droites d'équations x = –1 y = – 1 sont deux asymptotes à C_h

● Etudions h sur $D_E = D_h \cap [0, +\infty[$

$D_E = [0, 1[\cup]1, +\infty[$

On a pour tout $x \in D_E$: $h(x) = \frac{x}{x-1}$ car $|x| = x$

h est dérivable sur D_E et $h'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		–	‖	–	
$h(x)$	0 ↘		$+\infty$ ↘		1
		$-\infty$			

● $g(x) = h(x)$ pour $x \in]0, 1[$

a) g étant continue et strictement décroissante sur]0, 1[

donc g réalise une bijection de]0, 1[sur J = $]-\infty, 0[$

b) $y \in]0, 1[$, $x \in]-\infty, 0[$

$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$, cherchons donc y

$$g(y) = \frac{y}{y-1} = x \Leftrightarrow y = xy - x$$

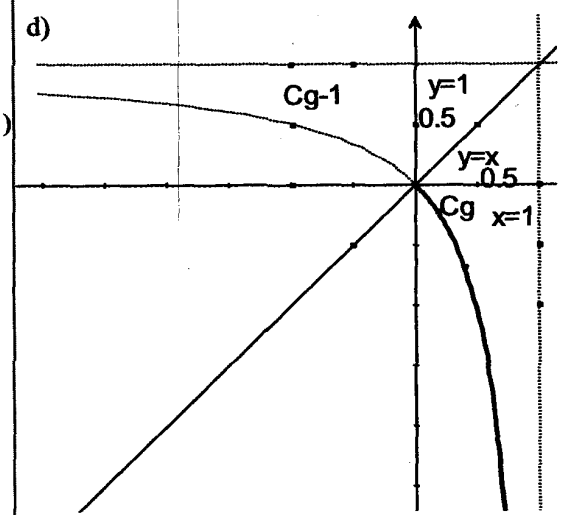
$$\Leftrightarrow y(x-1) = x \Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1}.$$

D'où $\boxed{g^{-1}(x) = g(x) = \frac{x}{x-1} ; x \in]-\infty; 0[}$

c) g est dérivable et $g'(x) \neq 0$ sur]0, 1[donc g^{-1} est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et on a

$$(g^{-1})'(x) = g'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

d)



Exercice n° 16

● a) g est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur IR et $g'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$

$g'(x) = 0$ signifie $x = 0$ ou $x = -1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	–	0	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗		2 ↘		1 ↗		$+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$

b) • g est continue et strictement croissante sur [0, $+\infty$[et $g([0, +\infty[) = [1, +\infty[$

Comme $0 \notin [1, +\infty[$ alors l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas des solutions dans $[0, +\infty[$

De même l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas des solutions Dans l'intervalle $[-1, 0]$

- g est continue et strictement croissante sur

$]-\infty,-1[$ et $g(]-\infty,-1[)=]-\infty,2[$

Comme $0 \in]-\infty,2[$ alors l'équation

$g(x)=0$ admet

une solution unique α dans $]-\infty,-1[$

Conclusion : L'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans IR

- $g(-1,7) \simeq -0,156$ et $g(-1,6) \simeq 0,488$

$g(-1,7) \times g(-1,6) < 0$ donc : $\boxed{-1,7 < \alpha < -1,6}$

c)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Signe de $g(x)$	$-$	0	$+$

2) a) $x \in IR \setminus \{1\}$; $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x^3}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x}{1-x^3}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{x}{x^3}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{1-x^3}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x}{x^3}=0$$

Comme :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x^3$	$+$	0	$-$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1+x}{1-x^3}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1+x}{1-x^3}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

Interprétation : les droites y = 0 et x = 1 sont deux asymptotes pour la courbe de f

b) $f'(x)=\dfrac{(1+x)'(1-x^3)-(1+x)(1-x^3)'}{(1-x^3)^2}$

$$f'(x)=\frac{1-x^3-(1+x).(-3x^2)}{(1-x^3)^2}=\frac{2x^3+3x^2+1}{(1-x^3)^2}$$

Donc $\forall x \in IR \setminus \{1\}$ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1-x^3)^2}$

c) Le signe de $f'(x)$ et celui de $g(x)$ (voir 2 – a)

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	
$f(x)$	0 ↘	$+\infty$ ↗ $f(x)$	$-\infty$ ↗	0

● h la restriction de f à l'intervalle $]1,+\infty[$

a) h est continue et strictement croissante sur $]1,+\infty[$

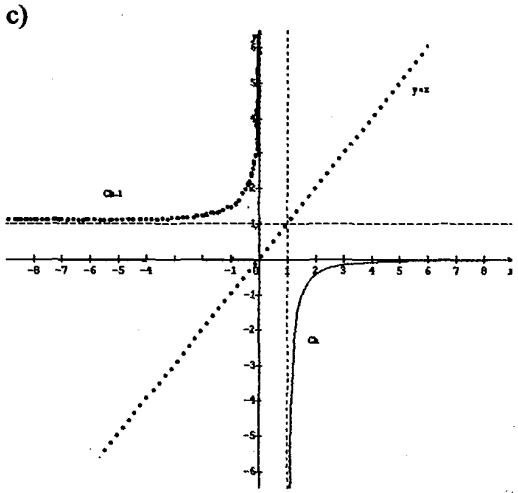
d'où h réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]-\infty,0[$

b) $h(2)=\dfrac{3}{1-8}=-\dfrac{3}{7}$

- $(h^{-1})'(-\frac{3}{7})=\dfrac{1}{h'\left[(h^{-1})(-\frac{3}{7})\right]}=\dfrac{1}{h'(2)}=\dfrac{1}{\frac{29}{(-7)^2}}$

D'où $\boxed{(h^{-1})'(-\frac{3}{7})=\frac{49}{29}}$

c)



Exercice n° 17

$\forall x \in [-1,0]$, $g(x)=2x^3-3x^2+3$

a) $\forall x \in [-1,0]$, $g'(x)=6x^2-6x \succ 0$

x	-1		0
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-2	↗	3

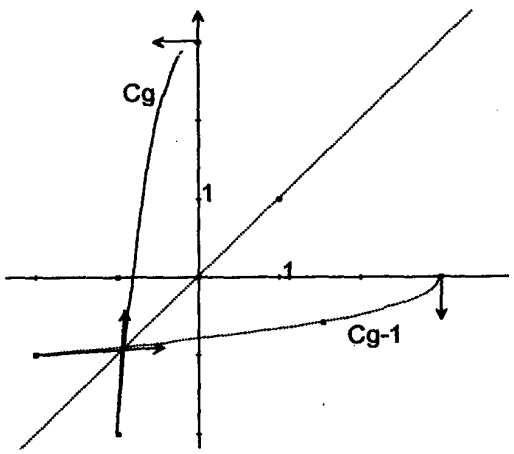
b) g est continue et strictement croissante sur $[-1,0]$ d'où g réalise une bijection de $[-1,0]$ sur $[-2,3]$ donc admet une fonction réciproque définie sur[-2,3].

c) $g(]-1,0[)=]-2,3[$, comme $0 \in]-2,3[$ et g est

une bijection alors L'équation g (x) = 0 admet une unique solution $x_0 \in]-1,0[$

d) $(g^{-1})'(0)=\dfrac{1}{g'\left[(g^{-1})(0)\right]}=\dfrac{1}{g'(x_0)}=\dfrac{1}{6x_0^2-6x_0}$

e)



Exercice n° 18

● $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ (à rectefier)

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	−	0	+		+
1 − x	+		+	0	−
$\dfrac{x}{1-x}$	−	0	+	‖	−

D'après le tableau de signe : Df = [0 , 1[

f est dérivable sur] 0 , 1[et on a :

$$f'(x)=\frac{(\frac{x}{1-x})'}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}=\frac{1}{2(1-x)^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}>0$$

• T de variation de f

x	0		1
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\sqrt{\frac{1}{0^+}}=+\infty$$

● a) f est continue et strictement croissante sur [0 , 1[

d'où f réalise une bijection de[0 , 1[sur [0 , $+\infty$ |

d'où f admet une fonction réciproque f^{-1} definie sur [0 , $+\infty$ [

b) • $(f^{-1})(1)=\alpha \Leftrightarrow f(\alpha)=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}=1 \Leftrightarrow 2\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{(f^{-1})(1)=\dfrac{1}{2}}$

• $(f^{-1})(2)=\alpha \Leftrightarrow f(\alpha)=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}=2 \Leftrightarrow 5\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{4}{5}$ donc $\boxed{(f^{-1})(2)=\dfrac{4}{5}}$

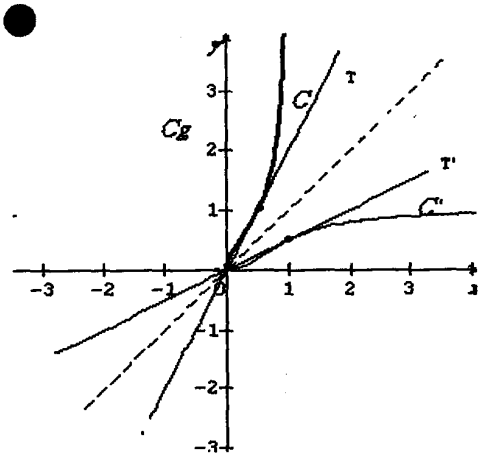
c) * On a $(f^{-1})(1)=\dfrac{1}{2}$ et $f'(\dfrac{1}{2})\neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 1 et $(f^{-1})'(1)=\dfrac{1}{f'\left[(f^{-1})(1)\right]}=\dfrac{1}{f'(\frac{1}{2})}=\dfrac{1}{2}$

* On a $(f^{-1})(2)=\dfrac{4}{5}$ et $f'(\dfrac{4}{5})\neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 2 et $(f^{-1})'(2)=\dfrac{1}{f'\left[(f^{-1})(2)\right]}=\dfrac{1}{f'(\frac{4}{5})}=\dfrac{4}{25}$

d) T : $y=f'(0.5)(x-0.5)+f(0.5)=2x$

e) T' : $y=(f^{-1})'(1)(x-1)+(f^{-1})(1)=\dfrac{1}{2}x$

●



4) $y \in [0,1[$, $x \in [0,+\infty[$

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$, cherchons donc y

$$f(y)=\sqrt{\frac{y}{1-y}}=x \Leftrightarrow \frac{y}{1-y}=x^2$$

$$\Leftrightarrow y=x^2-yx^2 \Leftrightarrow y(1+x^2)=x^2$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{x^2}{1+x^2}$$

Conclusion : $f^{-1}(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in [0,+\infty[$

5) • posons u(x) = sin x

$x \to \sin x = U(x)$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

U($\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$) = $]0,1[$

$x \to f(x)$ est dérivable sur U($\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$) = $]0,1[$

Donc g(x) est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

• $g'(x) = (f \circ U(x))' = U'(x) \cdot f'(U(x))$

$$= \cos x \cdot \frac{1}{2(1-\sin x)^2\sqrt{\frac{\sin x}{1-\sin x}}}$$

Donc $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\boxed{g'(x)=\frac{\cos x}{2(1-\sin x)^2\sqrt{\frac{\sin x}{1-\sin x}}}}$

Exercice n° 19

● f est dérivable sur]0 , 2[et $f'(x)=\frac{(\frac{x^3}{2-x})'}{2\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}}$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{\frac{3x^2(2-x)+x^3}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}}=\frac{6x^2-3x^3+x^3}{2(2-x)^2\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x^2(3-x)}{2(2-x)^2\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}}$$

Or $x \in [0,2[$ donc $(3-x)>0$ d'où $f'(x)>0$

x	0		2
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3}{2-x}=\frac{8}{\underbrace{0^+}_{2-x>0}}=+\infty$$

●

f est continue et strictement croissante sur [0 , 2 [

Donc f réalise une bijection de [0,2[sur L'intervalle

$J=\left[f(0),\lim_{x\to 2} f(x)\right[=[0,+\infty[$ D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0,+\infty[$

Exercice n° 20

● la fonction $x \to \cos x$ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

Et $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : cosx > 0 donc f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

● On a $f'(x)=-\frac{(\sqrt{\cos x})'}{\sqrt{\cos x}^2}=-\frac{\frac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x}$

$$f'(x)=-\frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x}=\frac{\sin x}{2\cos x\sqrt{\cos x}}$$

Comme pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a cosx > 0 et sinx > 0

On aura $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ $f'(x)>0$

* f est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

D'où f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[1,+\infty[$

Car $f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left[f(0),\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\right[$ et on a

$f(0)=1$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

● a) $f^{-1}(1)=0$ et $f'(0)=0$ donc f^{-1} non dérivable à droite en 1

b)* f est dérivable, $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x)\neq 0$

donc f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]1,+\infty[$

$$*(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\left[(f^{-1})(x)\right]}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sin(f^{-1}(x))}{2\cos(f^{-1}(x)).\sqrt{\cos(f^{-1}(x)}}} \quad (1)$$

Or $fof^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{\cos(f^{-1}(x))}}=x \Rightarrow \cos(f^{-1}(x))=\frac{1}{x^2}$

Aussi on a :

$$\sin(f^{-1}(x))=\sqrt{1-\cos^2(f^{-1}(x))}=\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-x^4}{x^4}}=\frac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{x^4}}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^2}$$

Donc $\forall x \in]1,+\infty[$ on a : $\sin(f^{-1}(x))=\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^2}$

Remplacent maintenant $\cos(f^{-1}(x))$ et $\sin(f^{-1}(x))$ par

Leurs expressions en fonction de x dans l'égalité (1) :

On trouve :

$$(f^{-1})'(x)=\frac{2.\frac{1}{x^2}.\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^4-1}}{x^2}}=\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$$

Conclusion :

$$\forall x \in]1,+\infty[\,,\ \boxed{(f^{-1})'(x)=\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}}$$